一、摘要

本研究主要的目的希望能藉由觀察、歸納的方式，將分數化為循環小數時所出現之循環節位數及循環節數值的規律性發掘出來，並配合所建立之質數─循環小數對照表來計算大數字之分數化為循環小數的結果。

本研究的主要結論有：

（一）若a為質數且 1/a的循環節長度=x， 則 $1/a^n$的循環節長度為$a^{(n-1)}x$。

（二）若$a=2^m\times5^n\times P_1^{S1}\times P_2^{S2}\times\cdots\times P_n^{Sn}$時，則 1/a會有max（m，n）個不循環位數，和長度為$[P_1^{S1},\ P_2^{S2},\cdots,\ P_n^{Sn}]$的循環節。

（三）若a為質數且 1/a的循環節數值=k，則 $1/a^n$的循環節數值是先以每 $1/a^{n-1}$個數字做分段，右邊一小段減去左邊一小段之值皆為k之正整數倍

（四）若$a=2^m\times5^n\times P_1^{S1}\times P_2^{S2}\times\cdots\times P_n^{Sn}$時，質因數 2、5 不影響循環節數值的規則，若$P_i^{Si}$所對應的循環節數值為$K_i$，循環節長度為$X_i$，則須以max$K_i$個數字做分段（若max$K_i$恰等於 1/a之循環節個數，則取次大者），右邊一小段減去左邊一小段之值皆為P_i^{Si}/a之正整數倍

（五）n/m 化為循環小數時，並不會影響循環節位數，其數值則與 1/m 有 n 倍的關係。

利用上述結論，依下列步驟即可推算 n/m 化為小數時的循環節位數及數值：

（一）將 m 做質因數分解。

（二）判斷 1/m 的循環節位數（含循環節位數與不循環位數）。

（三）將循環節作分段並推算分段之間的數值差。

（四）連結各分段數值，即求得 1/m 化為循環小數之結果。

（五）將 1/m 化為循環小數之結果乘上 n 倍即為所求。

二、研究動機

國中一年級上學期在課堂上有學到小數與分數的互化，當時心中的想法是如果分數的分母越來越大時，要用長除法將分數化為小數(循環小數)是很費時的。而在很多精密儀器的設計上，只要數據上相差一點點，結果可能就很不一樣，這看似渺小的數值卻往往是左右科學進步的關鍵。這讓我們不禁想要去尋找出一種較簡便、快速的方法能將分數轉化為小數而不用完全靠計算機或電腦。我們看過另外一組（校內科展）的研究內容是分母是質數的規律性，因此我們心想：如果分母是合數，那會有什麼規則呢？於是我們開始著手研究這份報告…

三、研究目的

一、觀察、歸納分數化為循環小數時所出現之規則
二、能利用觀察歸納出的規律性預測任意分數化為循環小數的結果

四、研究器材

※ 電腦程式－RECURING
※ 計算機
※ 紙、筆
※ 「驚」世之作－怵目的循環小數（研究質數循環小數的校內科展作品）

五、研究過程

在我們的研究中，我們結合任意正整數皆可以標準分解式唯一分解的觀念，試圖利用質數表中所列之數值（包括循環節長度、循環節數值）找出任意正分數化為循環小數的規律。

一、名詞解釋

※ 什麼是循環節、循環節長度、不循環位數：

以 1/28 為例：$1/28=0.03\overline{571428}$，則 571428 為 1/28 的「循環節」,「循環節長度」為 6，「不循環位數長度」為 2。

二、研究步驟

（一）質數循環節的長度（1/a，a 為單一種質數且有次方）

$\boxed{\text{觀察}}$：

1/7 的循環節長度=6

$1/7^2$的循環節長度=42＝6×7

$1/7^3$的循環節長度=294＝6×7^2。

……………………………………………………………………………………

1/11 的循環節長度=2

$1/11^2$的循環節長度=22＝2×11

$1/11^3$的循環節長度=242＝2×11^2。

歸納：

我們只要先找出 1/a的循環節長度=x，$1/a^2$的循環節長度就是ax，$1/a^3$的循環節長度是a^2x…。

推論：

$1/a^n$的循環節長度為$a^{(n-1)}x$。

驗證：（利用電腦程式：Recuring）

1/19 的循環節長度=18

$1/19^2$的循環節長度=342＝18×19

$1/19^3$的循環節長度=6498＝18×19^2。

（二）分母為質因數乘積時循環節的長度

觀察：

1. 1/21 的循環長度為 6（$0.\overline{047619}$）

   1/21＝1/（3×7），1/3＝$0.\overline{3}$（1 位），1/7＝$0.\overline{142857}$（6 位）。

   1/221 的循環節有 48 位（略）

   1/221=1/（17×13），1/17=$0.\overline{0588235294117647}$（16 位），

   1/13=$0.\overline{076923}$（6 位）。

猜測：

合數的循環節長度與質因數的循環節長度有什麼關係呢？＋、－、×、÷，或因數、倍數？

歸納：

我們發現：合數的循環節個數是各個質因數循環節個數的最小公倍數。

延伸：

質因數含次方時，也相同嗎？1/147=1/（3×7^2），循環節有 42 位。

1/3＝$0.\overline{3}$（1 位），1/49=（42 位，略）。根據猜測，[1,42]=42，應有 42 位。

計算後證明確為 42 位。

2. 如果質因數分解後出現 2 或 5 時，結果有何不同？（因為分母為 2 或 5 是整除的！）

觀察：

（1）若分母裡有一個 2 或或一個 5，小數位後面就有一位數不循環。

例：1/14=1/（2×7）=$0.0\overline{714285}$

（2）若分母內包含了 2 或 5 的 n 次方，小數位後面就有 n 位數不循環。

例：1/28=1/（$2^2\times7$）=$0.03\overline{571428}$

（3）如果分母的質因數同時有 2 和 5，不循環位數就是 2 和 5 的次方數中較大的。

例：$1/3500=1/(2^2\times5^3\times7)=0.000\overline{285714}$

$\boxed{\text{歸納}}$：

綜合（一）和（二）可得：

當分母為任意自然數時，將分母以標準分解式表成 $2^m\times5^n\times P_1^{S1}\times P_2^{S2}\times\cdots\times P_n^{Sn}$ 時，會有 max（m, n）個不循環位數，和長度為 $[P_1^{S1}, P_2^{S2}, \cdots, P_n^{Sn}]$ 的循環節。

$\boxed{\text{推測}}$：

例：$1/(2^2\times3^2\times5^3\times7\times17)$ 的循環節個數？

答：前三位不循環(2 和 5 的最高次方為 3)，循環節個數是 48(因為[1,6,16]=48)

（三）循環節數值的求法

1.利用長除法，即可求得循環小數的循環節

例：求 1/（axb）的方法：

（1） 求出 1/a。

（2） 求 1/（axb）的不循環位數 x，和循環節個數 y。

（3） 將 1/a 寫出 x+y 位。

（4） 除以 b，算到第 x+y 位。

（5） 前 x 位不循環，後 y 位為循環節。

例：已知 $1/3=0.\overline{3}$，求 1/12=？

答：$1/12=1/(2^2\times3)$ $\therefore x=2$，$y=1$

$2+1=3$ $0.333\div4=0.083\cdots$

$1/12=0.\overline{083}$

$\boxed{\text{討論}}$：如果循環節本身的長度太長，上述的方法就顯得不好用了！

2.另一種尋找循環節數值的規則

$\boxed{\text{說明}}$：

※借位：有不足者，向上一小組尾數借 1 或借 2…補在下一組的首數之前。

（1）當分母是單一質數的次方

$\boxed{\text{觀察}}$：

1/7 的循環節為 142857

1/49=1/（7x7），7 的循環節個數是 6，所以每 6 位一組。

循環節為 020408163265306122448979591836734693877551

877551	
734693	142858

591836	142857
448979	142857
306122	142857
163265	142857
020408	142857

因為下一組為 020408-877551 須借位，故最後一組實為 142857，等於 1/7 的循環節。

………………………………………………………………………………………………

$1/7^3$=1/343 的循環節：002915 451895 043731 778425 655976 676384 839650
145772 594752 186588 921282 798833 819241 982507
288629 737609 329446 064139 941690 962099 125364
431486 880466 472303 206997 084548 104956 268221
574344 023323 615160 349854 227405 247813 411078
717201 166180 758017 492711 370262 390670 553935
860058 309037 900874 635568 513119 533527 696793

說明（每組取 6x7=42 位）：

由 1/7 推測 $1/7^2$時，我們將循環節每 6 個分一小節；但是推測 $1/7^3$時為每 42 個分一小節，原因是由 $1/7^2$推測 $1/7^3$是利用 $1/7^2$的分割方式，與 1/7 的循環節數值（142857）

………………………………………………………………………………………………

下組減上組答案為 142857 循環 7 次（最末一組原為 142857…142858，但下一組開頭為 0029…須借位）

驗證：

$1/11^2$=1/121。11 的循環節個數為 2，所以每 2 位一組。

循環節：00826446280991735537 19

後組減前組答案為 8181…為 0909…（1/11 的循環節）的 9 倍。

結論：

若a為質數且 1/a的循環節數值=k，則 $1/a^n$的循環節數值是先以每 $1/a^{n-1}$個數字做分段，右邊一小段減去左邊一小段之值皆為k之正整數倍。

（2）當分母是質因數乘積時

說明：

※ 若各質因數的循環節個數都為 1 或等於 Y 時，只要 Z 是 Y 的因數，且 Z≠Y≠1 即可。

觀察：

※以 1/21 為例

1/（3x7）=1/21 的循環節為 047619

3 的循環節個數為 1，7 的為 6，所以有 2 位一組和 3 位一組兩種分法。

每 2 位一組：

↓往下一橫行減

204	
117	87
75	42
04	71

因為下一組為 76-204 須借 2，所以得 714285，是 142857 的 5 倍。

每 3 位一組：

↓往下一橫行減

1047	
618	429
047	571

因為下一組為 618-1047 須借 1，所以得 571428，是 142857 的 4 倍。

……………………………………………………………………………………

※以 143 為例

1/143=1/（11×13）的循環節為 006993

11 的循環節個數為 2，13 為 6，所以每 2 數分為一組。

↓往下一橫行減

100	
92	08
69	23
00	69

因為下一組為 69-100 須借 1，所以得 692307，是 1/13 的循環節 076923 的 9 倍。

……………………………………………………………………………………

※以 1001 為例

1/1001=1/（7×11×13）的循環節為 000999

7 的循環節個數為 6，11 的循環節個數為 2，13 的循環節個數為 6，所以每 2 數分為一組。

↓往下一橫行減

108	
99	09
98	01
09	89
00	09

所以得 098901，是 1/91=1/7×13 的循環節 010989 的 9 倍。

……………………………………………………………………………………

歸納：

若a分解為質因數乘積時有P_1^{S1}、P_2^{S2}、…、P_n^{Sn}等情形，此時選擇循環節位數

最大者為分段之依據，但如果循環節位數最大者與1/a之循環節位數相同，則取次大者，而右邊一小段減去左邊一小段之值皆為$P_i^{S_i}/a$之正整數倍

推測：

1/147=1/（3×7^2），由於其循環節個數有 42 位，所以我們採用推測的方式。7 的循環節個數為 6，3 的為 1，所以每 6 位一組。由於我們沒有找到「循環節乘以同一自然數」中自然數的規律，因此先用除法求得前 7 位 0068027，以第七位為 7 估計差大約為 142857 的 5 倍（7□□□□□-006802≒142857x5）。

142857x5=714285，可推得：

第 2 組為 006802+714285=721088（本為 721087，因為下一組須進 1）

第 3 組為 721088+714285=1435374

第 4 組為 435374+714285=1149659

第 5 組為 149659+714285=863945

第 6 組為 863945+714285=1578231

第 7 組為 578231+714285=1292517（因為下一組也須進 1）

驗證：

由 RECURING 程式驗證得其解確為：

The recurring decimal is:006802721088435374149659863945578231292517

Your divisor is 147. There are totally 42 recurring digits.

（3）分母含 2、5 兩種因數

觀察：

1/（2x3x5x7）＝1/210＝$0.0\overline{047619}$

兩個數分成一組，76－04＝71　119－75＝42　204－118＝85

和 1/21 的結果一樣。

1/（$2^2\times5^3\times7\times11$）=1/38500=$0.000\overline{025974}$

兩個數分成一組，59-02=57　74-59=14　102-73=28

和 1/77 的結果一樣。

歸納：

我們發現：2、5 因數對循環節相減的結果沒有影響，所以只要將不循環位數用除法求得，再利用（2）的做法即可。

（4）當分母是任意正整數時

（1/任意正整數）的循環節加以分段後，後組減前組的差固定為同一數。2 和 5 對於規則沒有影響。

觀察：

例 1：1/（$2^3\times3^2\times5^2\times7$）=1/12600=$0.000\overline{079365}$

每 2 位分一組，93-07=85　165-92=71　207-163=42（下一組為 93-207 須借 2）

857142 為 142857 的 6 倍

…………………………………………………………………………………………………

例 2：1/（2×13×17）=1/442

有 1 位不循環，循環節有 48 位，每 16 位一節。

（1/13×17）÷2=0.022…得第 1 位為 0

循環節前 16 位： 0226 244343 891402

加上 6923 076923 076923 可得第二小段 7149 321266 968325

加上 076923 076923 0769 可得第三小段 7918 552036 199095

故 442 的循環節為 022624434389140271493212669683257918552036199095

…………………………………………………………………………………………………

推測：1/（7^2×17）=1/833=？

7^2的循環節個數為 42，17 為 16，所以 1/833 的循環節有[42,16]=336 位。

每 42 位為一節，前 42 位：

00 12004801 92076830 73229291 71668667 46698679

加上 47 05882352 94117647 05882352 94117647 05882352 可得第二小段

47 17887154 86194477 79111644 65786314 52581032（1 須進位）

加上 94117647 05882352 94117647 05882352 94117647 05 可得第三小段

141296518 60744297 71908763 50540216 08643457 38（1 須進位）

加上 882352 94117647 05882352 94117647 05882352 9411 可得第四小段

129531812 72509003 60144057 62304921 96878751 50

加上 7647 05882352 94117647 05882352 94117647 058823 可得第五小段

106002400 96038415 36614645 85834333 73349339 73

加上 52 94117647 05882352 94117647 05882352 94117647 可得第六小段

58943577 43097238 89555822 32893157 26290516 20

加上 05882352 94117647 05882352 94117647 05882352 94 可得第七小段

64825930 37214885 95438175 27010804 32172869 14

加上 117647 05882352 94117647 05882352 94117647 0588 可得第八小段

76590636 25450180 07202881 15246098 43937575 03（因為下一組須進位）

驗證：

由 RECURING 程式驗證得其解確為：

The recuring decimal is0012004801 92076830732292917166866746698679

4717887154 86194477791116446578631452581032

41296518607442977190876350540216086434573 8

29531812725090036014405762304921968787515 0

06002400960384153661464585834333733493397 3

58943577430972388955582232893157262905162 0

64825930372148859543817527010804321728691 4

76590636254501800720288115246098439375750 3

Your divisor is 833. There are tatolly 336 recuring digits.

六、研究結果

（一）循環節個數之規律性

1. 若a為質數且1/a的循環節長度=x， 則$1/a^n$的循環節長度為$a^{(n-1)}x$。
2. 若$a=2^m\times5^n\times P_1^{S1}\times P_2^{S2}\times\cdots\times P_n^{Sn}$時，則1/a會有max（m，n）個不循環位數，和長度為$[P_1^{S1}, P_2^{S2}, \cdots, P_n^{Sn}]$的循環節。

（二）循環節數值之規律性

1. 若a為質數且1/a的循環節數值=k，則$1/a^n$的循環節數值是先以每$1/a^{n-1}$個數字做分段，右邊一小段減去左邊一小段之值皆為k之正整數倍
2. 若$a=2^m\times5^n\times P_1^{S1}\times P_2^{S2}\times\cdots\times P_n^{Sn}$時，質因數2、5不影響循環節數值的規則，若$P_i^{Si}$所對應的循環節數值為$K_i$，循環節長度為$X_i$，則須以max$K_i$個數字做分段（若max$K_i$恰等於1/a之循環節個數，則取次大者)，右邊一小段減去左邊一小段之值皆為P_i^{Si}/a之正整數倍

七、討論

前面已經討論了1/a的循環節位數及循環節數值的規律性，那麼要如何將1/a的結果應用到n/m上呢？n/m在化為循環小數時與1/a化為循環小數時在循環節位數及循環節數值的規律上有何異同？

（一）循環節位數

n/m=（1/m）×n，此時若1/m的循環節位數為k，則推測n/m仍為k。

驗證：1/7=0.142857　2/7=0.285714　…6/7=0.857142　循環節個數皆為6，分子部分的倍數不影響循環節個數。

（二）循環節數值

欲求n/m之循環節數值可先求1/m的循環數值,推測是否如7系列的分數具有數字順序調整之特性？（參考上一個例子）

驗證：1/13=0.076923　2/13=0.153846（與猜測不合）

因此循環節數值之求法可先求出1/m的循環數值，再乘上n倍，此時不需全部乘上n倍，可利用循環數值的規律，先求出第一小段乘上n倍後的數值再利用規律求其他小段。

八、結論

（一）若a為質數且 1/a的循環節長度=x， 則 $1/a^n$的循環節長度為$a^{(n-1)}$ x。

（二）若$a=2^m\times5^n\times P_1^{S1}\times P_2^{S2}\times\cdots\times P_n^{Sn}$時，則 1/a會有max（m，n）個不循環位數，和長度為$[P_1^{S1},\ P_2^{S2},\cdots,\ P_n^{Sn}]$的循環節。

（三）求 1/（a×b）的方法：

A.求出 1/a。

B.求 1/（a×b）的不循環位數 x，和循環節個數 y。

C.將 1/a 寫出 x＋y 位。

D.除以 b，算到第 x＋y 位。

E.前 x 位不循環，後 y 位為循環節。

（四）若a為質數且 1/a的循環節數值=k，則 $1/a^n$的循環節數值是先以每 $1/a^{n-1}$個數字做分段，右邊一小段減去左邊一小段之值皆為k之正整數倍

（五）若$a=2^m\times5^n\times P_1^{S1}\times P_2^{S2}\times\cdots\times P_n^{Sn}$時，質因數 2、5 不影響循環節數值的規則，若$P_i^{Si}$所對應的循環節數值為$K_i$，循環節長度為$X_i$，則須以$\max K_i$個數字做分段（若$\max K_i$恰等於 1/a之循環節個數，則取次大者)，右邊一小段減去左邊一小段之值皆為P_i^{Si}/a之正整數倍

（六）n/m 化為循環小數時，並不會影響循環節位數，其數值則與 1/m 有 n 倍的關係。

（七)利用上述結論,依下列步驟即可推算 n/m 化為小數時的循環節位數及數值:

1.將 m 做質因數分解。

2.判斷 1/m 的循環節位數（含循環節位數與不循環位數)。

3.將循環節作分段並推算分段之間的數值差。

4.連結各分段數值，即求得 1/m 化為循環小數之結果。

5.將 1/m 化為循環小數之結果乘上 n 倍即為所求。

※ 若各質因數的循環節個數都為 1 或等於 Y 時，只要 Z 是 Y 的因數，且 Z≠Y≠1 即可。

※借位：有不足者，向上一小組尾數借 1 或借 2…補在下一組的首數之前。

九、展望

在做完這個主題的研究之後，我們發現有一些尚未克服的困難尚待努力學習，以求突破！

（一）由於還是國一階段，對循環小數的分析皆是藉由觀察、歸納求得，還沒有利用證明導出通則，希望在往後的學習中能將證明的部分補齊！

（二）在循環節數值部分的正整數倍，目前是利用多算一位再做預測大約是幾倍，在整個過程中曾經嘗試要找出整數倍的來源的共通規則，但卻沒有發現一個通則，希望以後能將此通則找出來。

十、參考資料

（一）「驚」世之作－怵目的循環小數（研究質數循環小數的校內科展作品）

（二）國中數學第一冊（國立編譯館）

質數—循環小數對照表

質數	循環節數值	循環節位數
2	無循環	0
3	3	1
5	無循環	0
7	142857	6
11	09	2
13	076923	6
17	0588235294117647	16
19	052631578947368421	18
23	0434782608695652173913	22
29	0344827586206896551724137931	28
31	032258064516129	15
37	027	3
41	02439	5
43	023255813953488372093	21
47	0212765957446808510638297872340425531914893617	46
53	0188679245283	13
59	0169491525423728813559322033898305084745762711864 406779661	58
61	0163934426229508196721311475409836065573770491803 27868852459	60
67	014925373134328358208955223880597	33
71	01408450704225352112676056338028169	35
73	01369863	8
79	0126582278481	13
83	01204819277108433734939759036144578313253	41
89	01123595505617977528089887640449438202247191	44
97	0103092783505154639175257731958762886597938144329 896907216494845360824742268041237113402061855 67	96